2do parcial MA2112. Tipo B

Abril-Julio 2008.
Resolución realizada por: Osmar Betancourt
Carné: 16-10130. @BetancourtOsmar

Resolución

1. (12 ptos.) Si

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{x^2}^{(x-1)^2} f(x,y)\,dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{(x-1)^2}^{x^2} f(x,y)\,dydx$$

(a) Dibuje la región.

(b) Intercambie el orden de integración.

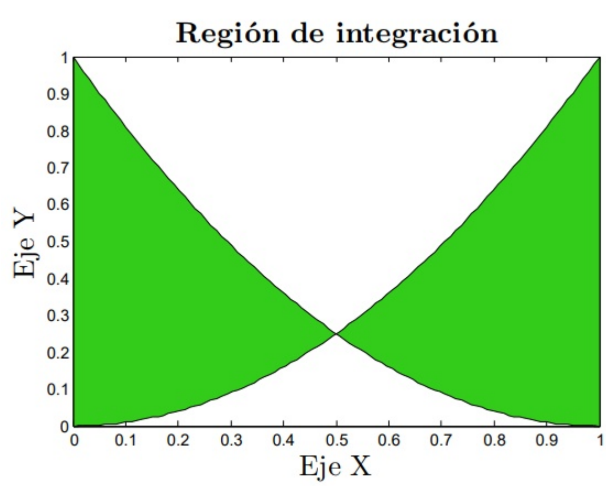
Al analizar los límites de integración podemos concluir que para la primera integral doble:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\ ,\ x^2 \leq y \leq (x-1)^2$$

Y para la segunda integral doble obtenemos que:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1\ ,\ (x-1)^2 \leq y \leq x^2$$

Por lo cual sabemos que x está comprendido entre 0 y 1. Grafiquemos la región de integración en función a las conclusiones a las cuales hemos llegado.



Ahora observamos que y está comprendida entre 0 y 1, procedemos a despejar x en función de y para poder cambiar los límites de integración:

$$y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x|,\ |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y} = x$$

$$y = (x-1)^2 \Rightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 1-x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases} \Rightarrow 1-x = \sqrt{y} \Rightarrow x = 1-\sqrt{y}$$

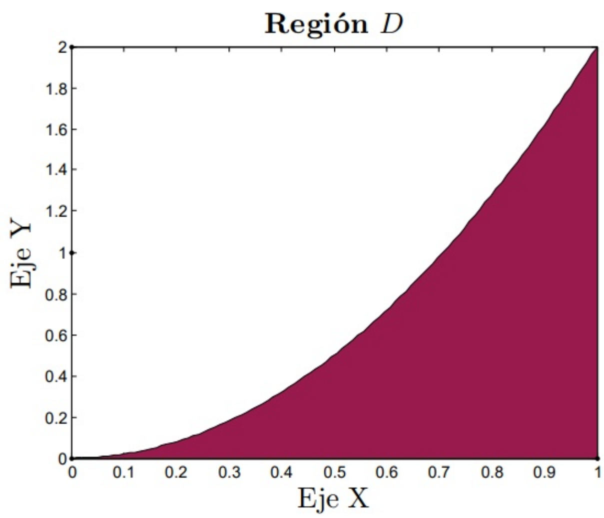
Recordemos que $x < 1$ y que $y \geq 0$ en nuestra región de integración. Dado que no podemos integrar la región con una sola integreal doble, procederemos a dividir la región en cuatro partes, de $0 \leq y \leq \frac{1}{4}$ en donde tenemos que tomar en cuenta que de izquierda a derecha iría desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{y}$ y luego desde $x = 1-\sqrt{y}$ hasta $x = 1$. Las otras dos regiones serían para $\frac{1}{4} \leq y \leq 1$ y luego de izquierda a derecha desde $x = 0$ hasta $x = 1-\sqrt{y}$ y de $x = \sqrt{y}$ a $x = 1$. Por lo cual obtenemos:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{1-\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dxdy + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \int_0^{1-\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dxdy$$

2. (12 ptos.) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ la región delimitada por la curva $y = 2x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$. Usando el cambio de variables $x = u$, $y = u^2 v$; calcular la integral:

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy$$

Lo primero que haremos será graficar la región D que está delimitada por la parábola y las dos rectas mencionadas.



Ahora debemos de verificar si el cambio de variables proporcionado es válido, para ello éste debe de ser de clase C^1 en D^* y $T(u,v)$ debe de ser inyectiva.

$$T(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = u \\ h_2 = u^2 v \end{cases}$$

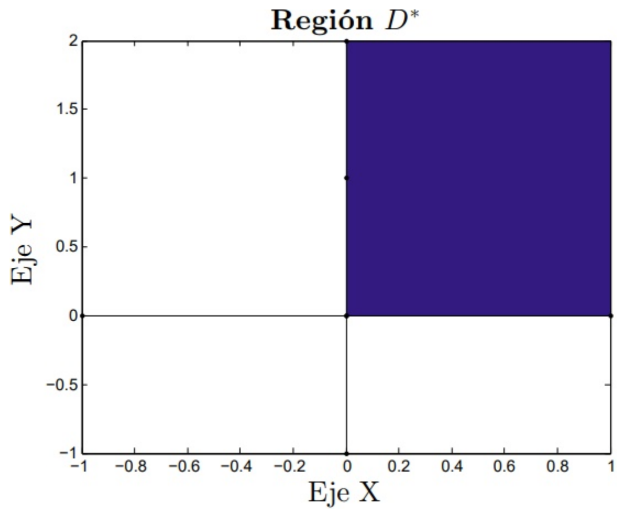
Tanto h_1 como h_2 son funciones polinómicas que por definición de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2 \therefore T(u,v)$ al ser composición de éstas también es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ y por ende también lo es en D^*. Calculemos el jacobiano, el cual tiene que ser distinto de 0 para que $T(u,v)$ sea inyectiva.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2uv & u^2 \end{vmatrix} = u^2 \neq 0$$

Por lo cual hemos comprobado inyectividad. Ahora procedamos sustituir el cambio de variables en las ecuaciones delimitan a la región.

$$y = 2x^2 \Rightarrow u^2 v = 2u^2 \Rightarrow v = 2 \ , \ x = 0 \Rightarrow u = 0 \ , \ y = 0 \Rightarrow u^2 v = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

Grafiquemos D^* con estos nuevos datos:



Observamos que la región de integración es más sencilla de definir en los intervalos de integración. Procedemos a realizar la integral, recordando que:

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int\int_{D^*} T(u, v)\, |J(u, v)|\, dudv$$

Por lo cual debemos de resolver la siguiente integral:

$$\int\int_{D^*} \left(u + u^2 v\right) ududv = \int_0^1 \int_0^2 \left(u^3 + u^4 v\right) dvdu = \int_0^1 u^3 v \Big|_0^2 du + \int_0^1 \frac{u^4 v^2}{2} \Big|_0^2 du$$

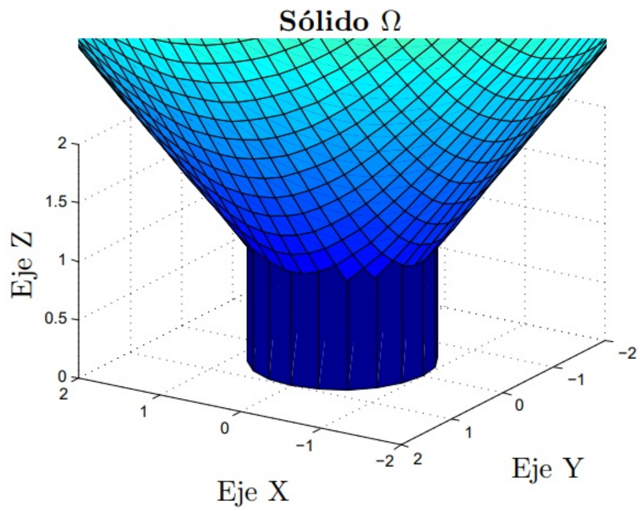
$$= \int_0^1 2u^3 du + \int_0^1 2u^4 du = \frac{2u^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{2u^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2}{4} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

Concluimos que:

$$\int\int_D (x + y)\, dxdy = \frac{9}{10}$$

3. (13 ptos.) Sea Ω la región acotada por las ecuaciones: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Usando coordenadas esféricas halle el volumen de Ω.

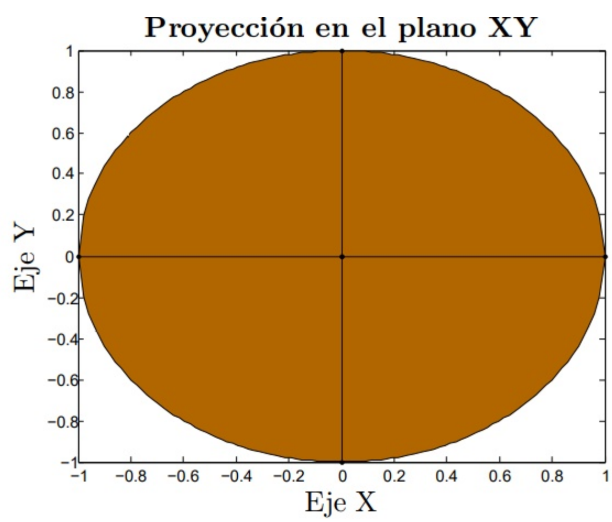
Identificamos que $z = 0$ es un plano que limita a nuestra región, $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro de radio 1 y finalmente, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la parte positiva de un cono, así que grafiquemos Ω.



Donde Ω es el espacio que hay entre el cono y el plano $z = 0$ que se encuentra dentro del cilindro. Realizamos el cambio de variabales a coordenadas esféricas.

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases} \quad \text{Y su Jacobiano viene dado por: } r^2\sin(\varphi).$$

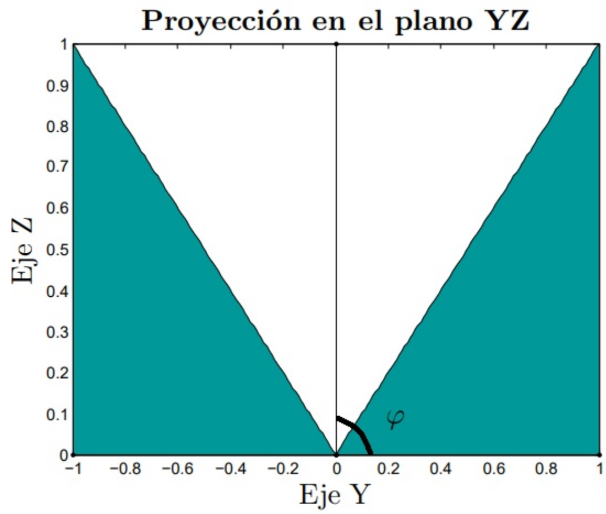
Procedamos a hallar los rangos en los cuales varían θ, φ y r. Lo primero que haremos será proyectar Ω en el plano XY para obtener θ.



Aquí concluimos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ya que la proyección de Ω recorre los 4 cuadrantes. Para hallar φ igualaremos las ecuaciones que limitan la región, encontraremos la coordenada en z en la cual se intersectan y luego haciendo $x = 0$ (por su proyección en el plano YZ) igualaremos y encontraremos el valor de y en ese punto.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow z = \sqrt{1} \Rightarrow z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 0^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |y| = 1 \text{ Tomaremos el valor positivo.}$$



Ya que y es el cateto opuesto y z es el cateto adyacente del triángulo de ángulo φ haremos lo siguiente:

$$\frac{1}{1} = \tan(\varphi) \Rightarrow \arctan(1) = \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Como la proyección de Ω en el plano YZ llega hasta el eje y concluimos que $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Determinemos la variación del radio, para hacer esto sustituimos los valores de las coordenadas esféricas:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow r^2\sin^2(\varphi)\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = 1$$

$$\Rightarrow r^2\sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \Rightarrow r = \frac{1}{|\sin(\varphi)|}$$

$$\text{pero como } \sin(\varphi) \text{ siempre es positivo en } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{\sin(\varphi)}$$

Entonces $0 \leq r \leq \frac{1}{\sin(\varphi)}$, planteamos nuestra integral triple:

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin(\varphi)}} r^2\sin(\varphi)\,drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\varphi)}{3\sin^3(\varphi)} d\varphi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\theta}{\sin^2(\varphi)}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2(\varphi)\,d\varphi d\theta = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cot(\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} -(-1)\,d\theta = \frac{\theta}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

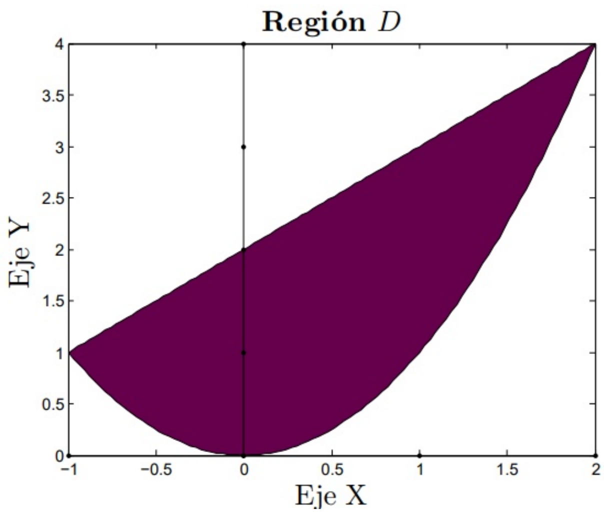
Concluimos que:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_{\Omega^*} r^2\sin(\varphi)\,drd\theta d\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

4. (12 ptos.) Sean D la región acotada por las curvas de ecuaciones $y = x^2$, $y = x + 2$, y C la frontera de D recorrida en sentido horario. Usando el Teorema de Green, calcular:

$$\int_{C^\uparrow} (xy + e^x)\,dx + \left(x^2 + \sin(y)\right)dy$$

Lo primero que debemos hacer es comprobar, que $C^{\uparrow}$ cumpla con todas las condiciones para poder aplicar el Teorema de Green, es decir que sea una curva simple a trozos, cerrada y recorrida en sentido antihorario. Sabemos que va en sentido horario, así que la recorremos en sentido antihorario a partir de ahora y denotaremos a esa curva $C^{\downarrow}$. Graficamos la región



Debemos de verificar las otras condiciones para emplear el Teorema de Green,así que manipulemos la integral para obtener lo que necesitamos.

$$\int_{C^{\uparrow}} (xy+e^{x})\,dx + \left(x^{2}+\sin(y)\right)dy = \int_{C^{\uparrow}} \left\langle \begin{pmatrix} xy+e^{x} \\ x^{2}+\sin(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \left(x^{2}+\sin(y)\right)dy$$

$$= \int_{C^{\uparrow}} \left\langle \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle$$

Observamos que P y Q son funciones de clase C^{1} al ser una función polinómica con exponencial (en el caso de P) y polinómica con trigonométrica (caso de Q), que por definición son de clase C^{1} en todo $\mathbb{R}^{2}$.

$$\int_{C^{\downarrow}} (xy+e^{x})\,dx + \left(x^{2}+\sin(y)\right)dy = \int\int_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Sólo falta definir los límites de integración de nuestra integral doble, observando la gráfica de D sabemos que $-1 \leq x \leq 2$, $x^{2} \leq y \leq x+2$. Entonces obtenemos:

$$\int\int_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{x^{2}}^{x+2} (2x-x)\,dydx = \int_{-1}^{2}\int_{x^{2}}^{x+2} xdydx = \int_{-1}^{2} xy\Big|_{x^{2}}^{x+2} dx$$

$$\int_{-1}^{2} \left(x^{2}+2x-x^{3}\right) dx = \frac{x^{3}}{3}\Big|_{-1}^{2} + \frac{2x^{2}}{2}\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^{4}}{4}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8+1}{3} + 4 - 1 - \left(\frac{16-1}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

Por lo cual, obtendríamos que para $C^{\uparrow}$:

$$\int_{C^{\uparrow}} (xy+e^{x})\,dx + \left(x^{2}+\sin(y)\right)dy = -\frac{9}{4}$$

Notificar en caso encontrar algún error.

Osmar Betancourt
16-10130@usb.ve

Resolución revisada por el prof. Humberto Valera.